

EVALUACIÓN DE VARIABLES DE INTERÉS PARA PROCESOS SÍSMICOS ESTOCÁSTICOS Y ESTACIONARIOS

Mauricio Gallego-Silva*

RESUMEN

Desde siempre la condición aleatoria de los procesos sísmicos ha establecido una necesidad del uso de la teoría de procesos aleatorios en el análisis de las variables internas. Es presentado un análisis del uso de la teoría de procesos estocásticos y estacionarios a la ingeniería sísmica; de forma ordenada y con todos los detalles del caso, se presenta sucintamente la posibilidad de usar en Colombia la teoría de procesos estocásticos estacionarios a la base de datos de sismos colombianos para poder estimar los valores extremos esperados de sismos registrados en el territorio nacional.

PALABRAS CLAVE

Procesos estocásticos; variables aleatorias, procesos estacionarios, Sismología,

INTRODUCCIÓN

La intensidad total de un movimiento de suelo definido por la aceleración, de duración T_d , en el dominio del tiempo esta dada mediante la integral de la historia de la aceleración en el tiempo, $a(t)$ al cuadrado de la forma:

$$I_o = \int_0^{T_d} a(t)^2 dt \quad (1)$$

el teorema de Parseval establece una analogía entre el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo de tal suerte que la intensidad total puede ser calculada en el dominio de la frecuencia como:

$$I_o = \frac{2\pi}{\pi} \int_0^{\omega_n} A(f)^2 df \quad (2)$$

Donde $A(f)$ representa el espectro de la amplitud de la transformada de Fourier de la his-

toria en el tiempo $a(t)$ que se puede calcular a partir de la teoría de Fourier como:

$$\underbrace{a_n + ib_n}_{\text{Transformada compleja}} = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{i\omega t} dt \rightarrow A(f) = \underbrace{\sqrt{a_n^2 + i^2 b_n^2}}_{\text{Amplitud de la transformada}}$$

Un proceso es estacionario si se define por medio de un solo espectro de amplitud espectral en toda la historia del movimiento. Un proceso es estocástico si presenta una naturaleza aleatoria en el tiempo, de tal suerte que un valor en un instante esta incorrelacionado con el inmediatamente anterior o posterior.

Los procesos sísmicos en el dominio del tiempo han sido tratados como procesos estocásticos y estacionarios ya que pueden cumplir con este par de condiciones.

La intensidad promedio, m_o o momento estadístico de orden 0 del espectro de amplitudes

* Ingeniero Consultor; Binaria Ltda.; mgallego@binaria.com.co, A.A: 7810; Bogotá D.C.

de Fourier puede ser obtenida dividiendo por la duración del evento de tal suerte que se expresa mediante:

$$m_o = \frac{2\pi}{\pi T_d} \int_0^{\omega_n} A(f)^2 df \quad \text{o bien} \quad (3)$$

$$m_o = \int_0^{\omega_n} G(\omega) d\omega \quad (4)$$

ayudados por esta expresión podemos definir la función de densidad espectral, $G(\omega)$ como:

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi T_d} A(f)^2 \quad (5)$$

La función de densidad espectral es comúnmente usada para caracterizar los sismos como un proceso aleatorio y por si misma define un proceso estacionario, es decir con propiedades estadísticas que no varían con el tiempo, lo que facilita los análisis. Sin embargo existen ocasiones en que los procesos son no estacionarios y las funciones de densidad espectral son evolutivas. La función de autocorrelación espectral es la transformada inversa de Fourier de la función de densidad espectral y muestra en el dominio del tiempo la forma como se relacionan las variables de amplitud entre tiempos, es decir, permite la evaluación de las variables de amplitud en un instante siempre y cuando se conozcan las variables en un instante inmediatamente anterior; la evaluación se logra de forma sencilla a partir de:

$$R(t, t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6)$$

Existen ocasiones en que se hace necesario evaluar los momentos estadísticos de orden superior del espectro de amplitudes por lo que resulta útil definirlos mediante:

$$m_n = \int_0^{\omega_n} \omega^n G(\omega) d\omega$$

donde n representa la potencia de interés.

La frecuencia central es una medida de la frecuencia donde la función de densidad de potencia espectral esta concentrada y su forma es:

$$\Omega = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (7)$$

esta puede ser usada junto con la intensidad promedio para calcular de forma teórica aproximada la aceleración máxima siguiendo (Vanmarcke, 1979):

$$A_{\max} = \sqrt{2m_0 \ln \left(2.8 \frac{\Omega T_d}{2\pi} \right)} \quad (8)$$

El factor de forma, indica la dispersión de la función de densidad espectral de potencia sobre la frecuencia central y se puede estimar mediante:

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_0 m_2}} \quad (9)$$

el factor de forma toma siempre valores entre 0 y 1; altos valores corresponden a espectros de amplitudes de ancho de banda grandes y bajos valores muestran una tendencia estrecha.

Una variable que toma en cuenta los efectos de amplitud y contenido de frecuencia de movimientos fuertes es la aceleración cuadrática media, A_{cm} la cual puede ser evaluada en los dominios del tiempo y de la frecuencia según el teorema de Parseval de la forma:

$$A_{cm} = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} \ddot{x}_g(t)^2 dt}}_{\text{Tiempo}} = \underbrace{\sqrt{m_0}}_{\text{Frecuencia}} = A_{cm} \quad (10)$$

Debido a que la ecuación anterior depende solo de la alta frecuencia esta medida resulta útil para propósitos de ingeniería; su estimación es sensible a la estimación de la duración de los eventos. Un parámetro que se encuentra fuertemente relacionado con la aceleración cuadrática

tica media es la Intensidad de Arias definida mediante (Arias, 1970):

$$I_a = \frac{\pi}{2g} \int_0^{T_d} \ddot{x}_g(t)^2 dt \quad (11)$$

la Intensidad de Arias tiene unidades de velocidad y usualmente es expresada en m/s ; existen versiones modificadas de esta tales como la Intensidad Característica I_c la cual fue relacionada por Ang (1990) al índice de daño de estructuras; y se describe mediante: $I_c = A_{cm}^{1.5} T_d^{0.5}$.

1. SISMOLOGÍA APLICADA PARA EL CÁLCULO DE DENSIDADES ESPECTRALES DE SISMOS REALES COMO PROCESOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS.

Los espectros de amplitudes de Fourier de desplazamiento de sismos reales cerca al origen muestran una tendencia decreciente con la frecuencia, por lo que algunos autores sugirieron la idea de que el decrecimiento fuera proporcional a w^{-2} ; de esta manera, y teniendo la historia de los desplazamientos en el borde de la falla de la forma:

$$U(t) = \frac{\sigma_a}{G} \beta \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad (12)$$

donde σ_a es el esfuerzo aparente en la falla, G es la rigidez al corte del medio (en este caso la corteza litosférica), b es la velocidad de transmisión de las ondas S , t es el tiempo de la ruptura igual a L/v , donde L es la longitud de ruptura y v la velocidad de ruptura. La transformada de Fourier de la ecuación anterior permitirá observar que el espectro de amplitudes del desplazamiento es:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_a}{G} \beta \tau (1 - e^{-t/\tau}) e^{i\omega t} dt = \frac{\sigma_a \beta}{G} \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}} \quad (13)$$

que muestra la forma de decrecimiento espectral propuesta por las tendencias de los sismos reales. Si se usa la definición estática del momento sísmico, M_0 , se observa que este puede determinarse con buena aproximación a partir de espectros de amplitudes de Fourier de campo lejano en bajas frecuencias, siempre que las longitudes de onda y la distancia a la fuente sean grandes. De lo anterior resulta que los espectros de amplitudes de Fourier de las ondas P en el campo lejano, cuando a cada uno de los pares se les asigna una variación en el tiempo dada por una función de Heaviside multiplicada por M_0 , están dados por:

$$U_P(\omega) = \frac{1}{4\pi R} \frac{M_0}{\rho \alpha^3} R_{\theta\theta P}, \quad (14)$$

y el espectro de ondas S por:

$$U_S(\omega) = \frac{1}{4\pi R} \frac{M_0}{\rho \beta^3} R_{\theta\theta S}, \quad (15)$$

donde $R_{\theta\theta P}$ es el valor cuadrático medio del patrón de radiación de ondas P y $R_{\theta\theta S}$ el de las ondas S .

En 1923, Nakano mediante la teoría de la elasticidad y suponiendo una tierra elástica, infinita e isotrópica, dedujo los patrones de radiación para los modelos de par sencillo y par doble, lo que llevó a la derivación de las primeras ecuaciones de desplazamiento para el modelo de par doble. Este modelo fue corroborado mediante estudios de mecanismos basados en las componentes de las ondas S , el ángulo de polarización, y en las ondas superficiales, que permitieron establecer que el modelo de doble par de fuerzas es el que mejor describe el mecanismo focal de un terremoto. Teniendo en cuenta todo lo anterior, Haskell (1966) definió una función de dislocación de la forma $D(\zeta, t)$, que representa el desplazamiento de la discontinuidad a lo largo del plano de falla en el punto ζ y en el tiempo t . El plano de falla se extiende a lo largo del eje ζ (fig. 1 arriba) y la función de dislocación es considerada como

la dislocación promedio sobre el ancho w de la falla; se supone que la falla se acaba cuando $\zeta=L$, donde L es la longitud de la falla tal y como se muestra en la fig. 1 abajo. De manera general, la dislocación que sufre una falla se genera en un segmento de la misma y no en toda su extensión; mecánicamente es imposible que se genere un sismo de gran magnitud en un punto o segmento de falla corto, entonces, cuanto mayor sea la longitud de fallamiento, mayor será la magnitud.

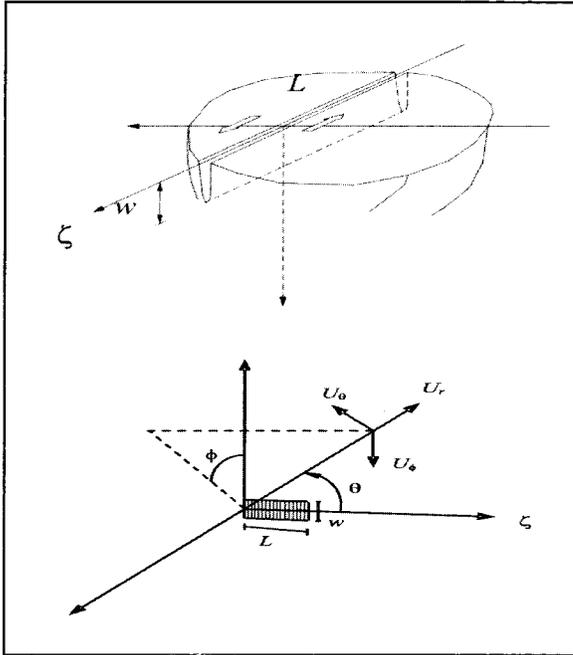


Figura 1. arriba: Diagrama de falla rectangular de Haskell. abajo: Sistemas de referencia locales para una falla rectangular.

No obstante, la ruptura que se observa en la superficie no necesariamente representa la extensión del plano fallado, debido a que muchas rupturas solo se extienden parcialmente hasta la superficie y la mayoría no se pueden observar del todo, pues ocurren a grandes profundidades o bajo el fondo oceánico, por lo que es necesario tener en cuenta este tipo de consideraciones. Además, los tipos de fallas establecen diferentes formas de comportamiento en la longitudes de la ruptura por lo que son necesarias relaciones para cada tipo de fuente.

Para describir la fenomenología de la radiación de alta frecuencia provocada por temblores, Aki (1967) estudió el modelo de dislocación de Haskell (1964), en el que una ruptura bajo esfuerzo cortante se propaga a través de una falla rectangular, la cual está dentro de un espacio elástico, isótropo e infinito. Aki, basado en los trabajos de Stokes, Lamb y Haskell dedujo que los desplazamientos en campo lejano debido a las ondas P y S , se escriben, en un sistema de coordenadas esféricas tal como el mostrado en la fig. 1 derecha, como:

$$U_R = \frac{1}{4\pi\beta^3 R} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \overbrace{\text{Sen}(2\theta)\text{Sen}(\phi)}^{\text{Patron de Radiacion}} * \int_0^L \dot{D}\left(\zeta, t - \frac{R-\zeta\text{Cos}(\theta)}{\alpha}\right) d\zeta \quad (16)$$

$$U_\theta = \frac{1}{4\pi\beta^3 R} \text{Cos}(2\theta)\text{Cos}(\phi) * \int_0^L \dot{D}\left(\zeta, t - \frac{R-\zeta\text{Cos}(\theta)}{\beta}\right) d\zeta \quad (17)$$

$$U_\phi = \frac{1}{4\pi\beta^3 R} \overbrace{\text{Cos}(2\theta)\text{Sen}(\phi)}^{\text{Patron de Radiacion}} * \int_0^L \dot{D}\left(\zeta, t - \frac{R-\zeta\text{Cos}(\theta)}{\beta}\right) d\zeta \quad (18)$$

donde U_R , U_θ y U_ϕ son los desplazamientos en dirección radial, angular y longitudinal respectivamente, w es el ancho de la falla, R la distancia al hipocentro, β la velocidad de onda S , α la velocidad de onda P , L la longitud y $\dot{D}(x, t)$ es la función de velocidad de dislocación. Tomando el punto inicial de la falla como el origen de un sistema de coordenadas cartesianas se tiene: $x=R\text{cos}(q)$, $y=R\text{sen}(q)$ y $z=R\text{sen}(q)\text{Cos}(f)$.

Las expresiones 16, 17 y 18 se pueden escribir de manera generalizada como:

$$U = P(R, \theta, \phi, \alpha, \beta) w \int_0^L \dot{D} \left(\zeta, t - \frac{R - \zeta \cos \theta}{(\alpha, \beta)} \right) d\zeta \quad (19)$$

Aplicando la transformada de Fourier para llevar la expresión anterior al dominio de la frecuencia se obtiene:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt = \omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt * \int_0^L \dot{D} \left(\zeta, t - \frac{r - \zeta \cos \theta}{(\alpha, \beta)} \right) d\zeta \quad (19)$$

donde ω es la frecuencia circular igual a $2\pi f$. Siguiendo el planteamiento inicial de Haskell (1966) fue necesario estimar la función de dislocación en cualquier momento $t + \tau_i$ y en cualquier punto $\zeta + x_i$; para lo cual se necesitó introducir una función de autocorrelación $\rho(x_i, t_i)$ de $D(\zeta, t)$ de la forma:

$$\rho(x_i, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{D}(\zeta, t) \dot{D}(\zeta + x_i, t + \tau_i) d\zeta dt \quad (20)$$

Según Haskell (1966), es posible establecer que la función temporal, es decir, la función de autocorrelación del tiempo, decrece exponencialmente con el $\log(\tau_i)$ y tiene la forma:

$$\rho(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(\zeta, t) D(\zeta + x_i, t + \tau_i) d\zeta dt = \rho_0 e^{-k_T |\tau_i|} \quad (21)$$

y la función espacial, es decir, la función de autocorrelación del espacio, tiene la forma:

$$\rho(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(\zeta, t) D(\zeta + x_i, t + \tau_i) d\zeta dt = \rho_0 e^{-k_L |x_i| - k_T |\tau_i - x_i / v|} \quad (22)$$

donde v es la velocidad de dislocación y $v = k_T / k_L$. Usando las funciones espaciales y temporales de autocorrelación descritas, Aki (1967) dedujo que el espectro de amplitudes de Fourier del desplazamiento provocado por las ondas S en el campo cercano puede expresarse como:

$$U(\omega) = \frac{i}{4\pi\phi\beta^3 R} * \frac{wD_0L}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos(\theta) - 1}{\beta} - \frac{1}{v}\right)^2 \left(\frac{\omega}{k_L}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{k_T}\right)^2}} \quad (23)$$

donde D_0 es el desplazamiento promedio de la falla. Aki estudió igualmente el caso particular cuando $\theta=0$ y además considerando la definición estática de momento sísmico como $M_0 = GwLD_0$, y pudo definir el espectro de amplitudes de desplazamiento como:

$$U(f) = \frac{R_{\theta\phi}}{4\pi\phi\beta^3} \frac{\overbrace{M_0}^{\text{Espectro de Brune - S(f)}}}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \frac{1}{R}, \quad (24)$$

donde M_0 es el momento sísmico (dinas-cm, ergios), f es la frecuencia natural (Hz), $R_{\theta\phi}$ es el valor cuadrático medio del patrón de radiación resultante de los productos de $\sin\phi\cos 2\theta$, $\sin 2\theta\sin\phi$ y $\cos 2\theta\cos\phi$; r es la densidad de masa del material (la corteza litosférica $\approx 2.8 \text{ gr/cm}^3$), β es la velocidad de ondas de corte ($\approx 3.5 \text{ km/s}$) y f_c es la llamada frecuencia de esquina. Sitio a partir del cual el espectro decrece de manera continua.

El término $1/R$ modela la atenuación geométrica de las ondas de cuerpo en el campo lejano; después se verá cómo este varía a medida que se aleja de la fuente para reflejar mejor la atenuación de las ondas a grandes distancias.

El espectro propuesto contiene una parte plana en la zona de bajas frecuencias cuya amplitud es proporcional a M_0 . Para altas frecuencias, el espectro decae como función de f^2 (por lo que se denominó modelo «omega cuadrada», en inglés, «omega square») y, las dos zonas del espectro se cortan aproximadamente en la frecuencia de esquina. El espectro de la ec. 24, al ser multiplicado por w^2 dará como resultado el espectro de amplitudes de Fourier

de aceleraciones, que puede ser evaluado mediante la siguiente expresión:

$$A(f) = CR_{\Theta\phi} S(f) \frac{1}{R} \quad (25)$$

donde C es un término constante que depende de las propiedades del material, dado por:

$$C = \frac{4\pi}{\rho\beta^3} \quad (26)$$

El término $S(f)$, llamado espectro de fuente de Brune (1970), se expresa mediante la siguiente relación:

$$S(f) = \frac{M_0 \cdot f^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad (27)$$

Brune (1970), con base en un modelo de falla circular encontró relaciones entre la frecuencia de esquina, el momento sísmico y la dimensión de la falla, de tal forma que la frecuencia de esquina para el modelo se escribe:

$$f_c = 4.9 \cdot 10^6 \beta \cdot 3 \sqrt{\frac{\Delta\sigma}{M_0}}$$

donde $\Delta\sigma$ es la caída de esfuerzos medida en bares, β está dada en km/seg y M_0 en dinas-cm. El término $A(f)$ de la ec. 25 representa el espectro de aceleraciones en un medio ideal; las condiciones bajo las cuales se va modificando este espectro a medida que el movimiento avanza se describen a continuación:

Atenuación Regional. Este parámetro toma en cuenta la energía disipada por procesos viscosos, comportamiento no lineal de la roca o disipación por calor. Se ha visto que una forma apropiada de representar este tipo de atenuación es mediante la multiplicación de $A(f)$ por un término exponencial decreciente de la forma $e^{-\pi f R/bQ}$, donde Q es el factor de calidad de la corteza litosférica en la región de estudio (Knopoff, 1964) y suele depender de la fre-

cuencia aproximadamente en la forma $Q = Q_0 f^e$, donde Q_0 y e son constantes para una zona de la corteza en análisis. En Colombia se necesita estudiar con detalle el factor de calidad de la corteza.

Decaimiento de la alta frecuencia. Como se aprecia en la ec. 25, el espectro de Brune predice amplitud constante para $f \gg f_c$, lo que resulta absurdo. En primer lugar por consideraciones energéticas, y además porque, como se observa en los espectros reales, a medida que se avanza en distancia, las altas frecuencias se van filtrando y las amplitudes de la aceleración van decayendo de una forma más rápida que lo predicho por la atenuación regional. Dicho decaimiento se ha atribuido tanto a efectos de fuente como a efectos de las capas superficiales. Boore (1983) utiliza la frecuencia de corte introducida por Hanks (1982), f_{max} , para modelar el abrupto decaimiento de la energía de alta frecuencia mediante un filtro Butterworth pasabajas. Singh *et al.* (1982) encontraron que este decaimiento podía ser representado mediante una expresión exponencial de la forma $e^{-\pi k}$, donde k es un factor que depende del sitio y que será motivo de calibración en la zona en estudio. Además, se ha visto que el parámetro k tiene variación con la distancia de la forma $k = k_1 + R/Q_1$. **Partición de la energía en dos componentes.** Como la energía del espectro de fuente es total, se asume una partición en dos componentes ortogonales horizontales, por lo que se involucra el factor $\sqrt{1/2}$, suponiendo que las componentes son iguales en ambas direcciones. **Corrección por superficie libre.** Se aplica un factor de 2 para predecir las amplificaciones de onda al llegar a la superficie.

Patrón de radiación. Se usarán los recomendados en la literatura internacional (Boore 1983; Boatwright, 1984) que oscilan entre 0.55 y 0.63. **Atenuación geométrica.** El término $1/R$ implica el predominio de ondas de cuerpo para distancias cercanas al epicentro; sin embargo, a mayores distancias el predominio es de ondas superficiales. Este efecto puede tomarse

en cuenta transformando el término $1/R$ en $(R \cdot R_x)^{-1/2}$, donde R_x es la distancia epicentral a partir de la cual predominan las ondas superficiales.

Introduciendo estos efectos se puede describir el viaje de las ondas S a través del medio y así establecer el espectro de amplitudes de aceleración en cualquier sitio particular. En estas condiciones, la ecuación original se transforma en la siguiente:

$$A(f) = \frac{\overset{\text{Superficie libre}}{\hat{2}}}{\underset{\text{Partición Energía}}{\sqrt{2}}} R_{\theta\phi} C \frac{\overset{\text{Espectro de Brune}}{M_0 f^2}}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \cdot \underset{\text{Atenuación Geométrica}}{\frac{R}{e^{\left(\frac{-\pi f R}{\beta Q_0 f \epsilon}\right)}} e^{\left(-\pi\left(\kappa_1 + \frac{R}{Q_1}\right)f\right)}} \quad (28)$$

Este modelo es llamado de fuente puntual y representa el EAF en un sitio después del viaje de las ondas afectado por las variables mencionadas. Este modelo ha sido aplicado en muchas zonas del mundo para distancias de hasta 100 km.

Después de esa distancia el movimiento deja de estar controlado por las ondas S. De esa distancia en adelante se utiliza la corrección en la atenuación por las ondas superficiales descrita en párrafos anteriores.

Se ha observado también que a distancias focales muy pequeñas, comparables con el tamaño de la ruptura, el modelo de fuente puntual falla. Por ello, se desarrolló un modelo sismológico que tiene en cuenta el tamaño finito de la zona de ruptura (Singh *et. al.*, 1989).

El modelo contempla una falla circular de radio r_0 que rompe con intensidad uniforme a lo largo del área. El punto de observación está si-

tuado justo arriba del foco, a una distancia R_0 sobre el hipocentro. Además, se supone que la ruptura de cada elemento ocurre aleatoriamente en el tiempo. Bajo estas hipótesis, el EAF puede ser descrito en el punto de observación como:

$$(A(f))^2 = 4R_{\theta\phi} C^2 (M_0 f_c^2)^2 \frac{e^{\left(-2\pi\left(\kappa_1 + \frac{R}{Q_1}\right)f\right)}}{(r_0)^2} \cdot \left[E_1(\alpha_1 R_0) - E_1\left[\alpha_1 \sqrt{(r_0^2 + R_0^2)}\right] \right] \quad (29)$$

donde $E_1(\cdot)$ es la integral exponencial (Gautschi y Cahill, 1965) y $\alpha_1 = 2\pi/\beta Q_0$. Nótese que en el modelo de Singh el radio al epicentro, R_0 , no divide la ecuación para no generar la indeterminación cuando el límite tiende a cero. El modelo de fuente finita parte de la suposición de que el observador se encuentra a una distancia cercana.

Como ya se mencionó, el radio de la falla equivalente crecerá a medida que aumente la magnitud; si esto sucede, y teniendo en cuenta que las ondas sufren todos los fenómenos de atenuación descritos anteriormente, la contribución de ondas que vienen del cada vez más lejano perímetro sufrirá los procesos exponenciales de atenuación, haciendo que la aceleración no crezca de forma indefinida. Este comportamiento es el que provoca la saturación de la aceleración para magnitudes muy grandes.

El análisis de los datos disponibles en Colombia ha permitido evaluar los parámetros relevantes de un modelo sismológico y no los parámetros de leyes de atenuación mediante regresiones clásicas y aproximaciones estadísticas que para el caso de bases de datos pobres como es nuestro caso no funcionan bien.

Se observa que, en general, las leyes usadas en estudios anteriores para el país tienen desviaciones estándar mayores que las determinadas en este estudio y, además, sobrestiman

sistemáticamente las aceleraciones observadas. Al comprobar con sismos pasados de los cuales se conoce su magnitud y distancia epicentral, es posible corroborar el favorable comportamiento de las leyes de *EAF* encontradas a partir del análisis con sismos colombianos.

El contar con buenas aproximaciones para los espectros de *EAF* garantiza que los valores pico generados a partir de teoría de vibraciones aleatorias de los mismos sean correctos para la estimación de los parámetros útiles en el diseño. En otras palabras, evaluar bien los *EAF* garantiza correcta evaluación de los espectros de respuesta.

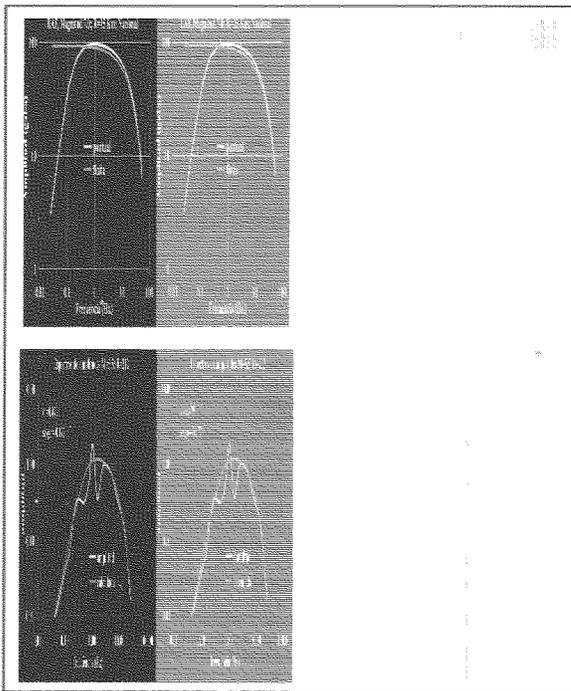


Figura 2. Arriba: Modelos de fuente puntual y fuente finita para una combinación de magnitud y distancia; abajo: Leyes de atenuación de *EAF* para diferentes distancias en una misma magnitud del mecanismo focal de fuentes Nacional.

En la fig. 3 es posible ver la buena aproximación de los *EAF* calculados contra lo registrado en algunos sismos intermedios en Colombia. Al repetir el proceso para todas las distancias y magnitudes es posible generar leyes de atenuación de *EAF*. En este primer caso los *EAF* reflejan la

variable de aceleración máxima del suelo; no obstante, a partir de la teoría sismológica clásica descrita con anterioridad el proceso puede extenderse a cualquier otra variable.

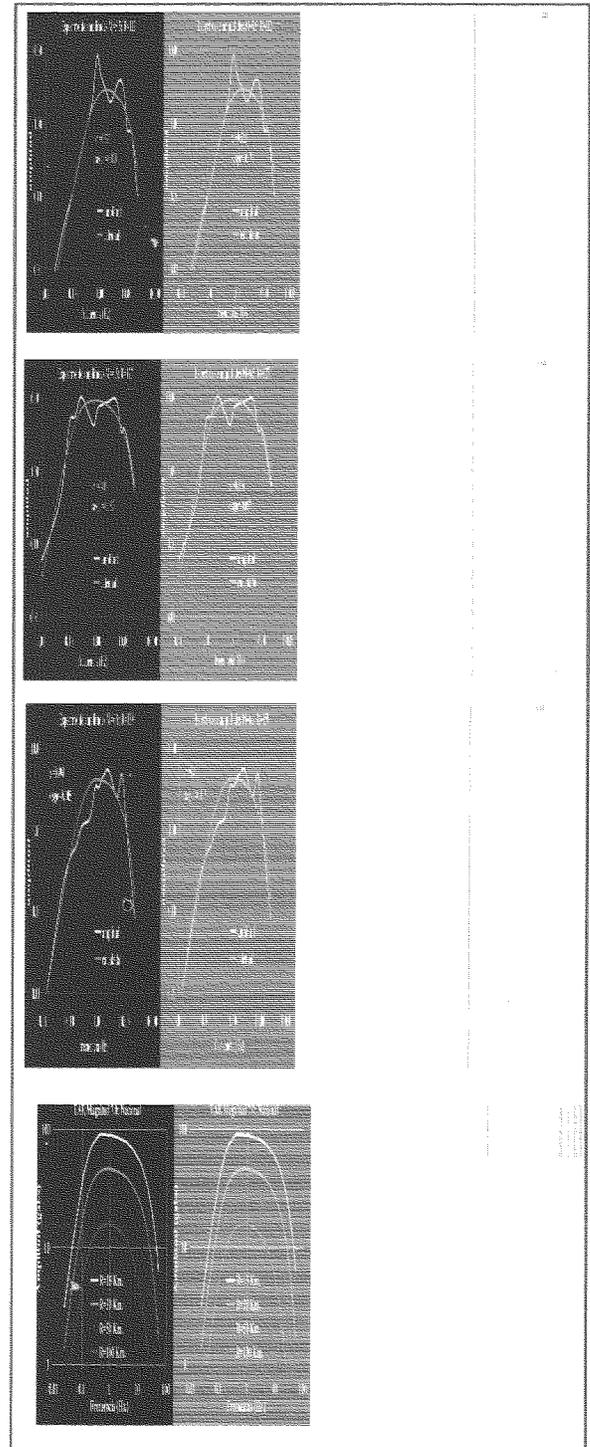


Figura 3. Comparación de *EAF* registrados por la RSNC (Amplitud) contra los calculados por medio de la teoría sismológica descrita en este artículo.

2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y TEORÍA DE VIBRACIONES ALEATORIAS

Los sismos y sus registros, los sismogramas, acelerogramas, velocigramas, etc. son tratados como procesos estocásticos que tienen contribuciones en un amplio rango de frecuencia contenido; sin embargo interesa conocer variables internas de estos registros tales como, por ejemplo, el número de veces que es sobrepasado un cierto valor o el número de cruces por cero o, más importante aún los valores máximos que se pueden presentar. Esto es útil para análisis de fatiga de elementos o para el diseño de las estructuras civiles que le competen a la ingeniería sísmica moderna. El desarrollo de la teoría para manejar los problemas expuestos anteriormente inicia con los trabajos de S.O. Rice (1954), Cartwright y Longuet-Higgins (1956), A.Powell (1958), S.H Crandall (1963), A.G. Davenport (1964) y muchos otros autores, que para el momento han desarrollado una ciencia al respecto consolidada. El siguiente tratamiento de variables sigue el planteamiento original de los autores mencionados.

2.1 Tasas de ocurrencia de un valor umbral

Considérese una función $x(t)$ con espectro de amplitudes $x(\omega)$ y densidad espectral $G(\omega)$ que sigue un proceso estacionario tal y como se muestra en la figura 4. El comportamiento de la función cerca de sus valores extremos puede ser descrito de forma simple como medida

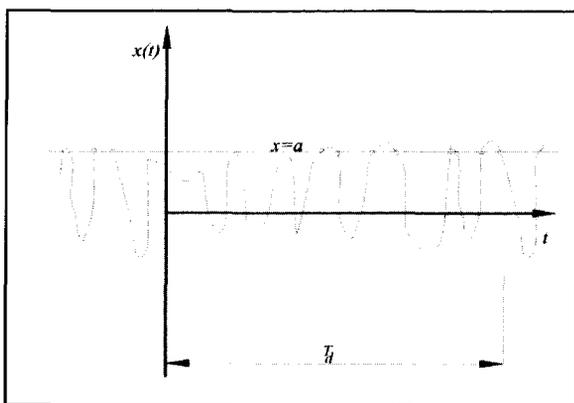


Figura 4: cruces de un nivel de intensidad umbral para un proceso estocástico.

útil para estimar el número de cruces que existe de una cantidad umbral denotada por a en una duración de evento descrita por T_d .

Ahora si nombramos $N_a^+(T)$ como la variable aleatoria que denota el número de veces que se supera el valor positivo umbral de a en la duración T_d del proceso estocástico; entonces el valor medio de dicha variable puede ser denotado por $n_a^+(T)$; de esta forma siguiendo teoría de procesos aleatorios llegamos a que:

$$n_a^+(T_d) = E(N_a^+(T_d)) \quad (30)$$

denotando una tasa de ocurrencia por unidad de tiempo de los cruces por el umbral positivo a como v_a^+ entonces la ecuación 30 se escribe como:

$$n_a^+(T_d) = v_a^+ T_d \quad (31)$$

Proponiendo la derivada de $x(t)$ con respecto al tiempo como:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \quad (32)$$

entonces es posible proponer la densidad de probabilidades entre la amplitud $x(t)$ y el cambio de la amplitud con respecto al tiempo $\dot{x}(t)$ como $p_{x\dot{x}} = (x, \dot{x})$ en el intervalo $t + \Delta t$, tal y como se muestra en la figura 5 arriba. Esta condición hace que usando la región favorable para los cruces de $x=a$ mostrada en la figura 5 abajo sobre la cual la densidad conjunta de probabilidades pueda ser integrada es posible encontrar la probabilidad de cruce de un valor determinado en el intervalo del tiempo. Todos los puntos que se encuentran dentro de la cuña del espacio $x(t) \dot{x}(t)$ de la figura 5 abajo cumplen con la condición que $x(t) < a$; por consiguiente la probabilidad de que se alcance el valor prescrito umbral en el tiempo t esta dada mediante:

$$P_{v_a^+ \Delta t} = v_a^+ \Delta t = \int_0^{\infty} \int_{a-\dot{x}\Delta t}^a p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}) dx d\dot{x} \quad (33)$$

si Δt se vuelve infinitesimal y además teniendo en cuenta de que la probabilidad toma el valor medio esperado de la tasa de cruces, la anterior ecuación puede ser simplificada con las siguientes consideraciones:

$$\int_{a-\dot{x}\Delta t}^a p_{\dot{x}\ddot{x}}(x, \dot{x}) dx d\dot{x} = p_{\dot{x}\ddot{x}}(x=a, \dot{x}) \dot{x} \Delta t \quad (34)$$

y la doble integral se evalúa mediante:

$$\Delta t = \int_0^{\infty} p_{\dot{x}\ddot{x}}(a, \dot{x}) \dot{x} d\dot{x} \quad (35)$$

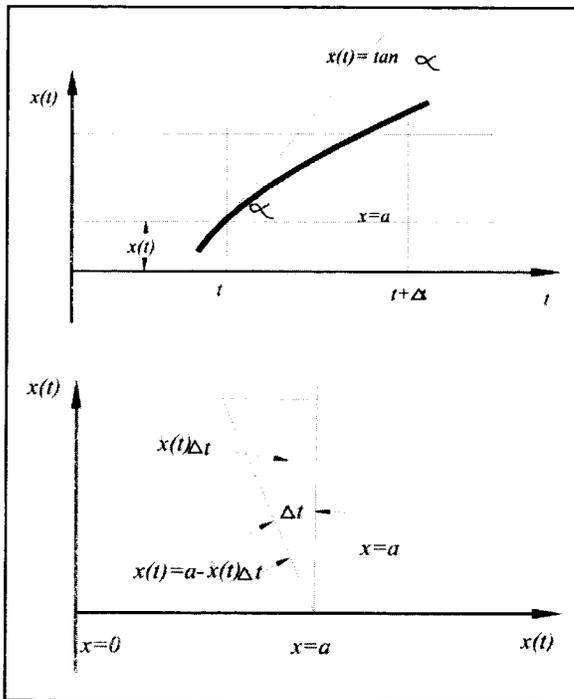


Figura 5. Arriba cruces de un nivel de intensidad umbral para un proceso estocástico. Abajo: región favorable para los cruces de $x=a$.

La tasa de ocurrencias por unidad de tiempo de valores que sobrepasan el valor umbral positivo prescrito esta dada por:

$$\nu_a^+ = \int_0^{\infty} p_{\dot{x}\ddot{x}}(a, \dot{x}) \dot{x} d\dot{x} \quad (36)$$

si la ley de probabilidad usada se aplica a un proceso estacionario estocástico Gaussiano o

Normal y, las desviaciones estándar de la amplitud y la velocidad de cambio de amplitud son descritas mediante los valores esperados de los momentos estadísticos a una potencia cuadrática de la densidad espectral del proceso, la ecuación anterior toma la forma:

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi m_0 m_2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{m_0^2} + \frac{\dot{x}^2}{m_2^2} \right)} \quad (37)$$

donde m_0 y m_2 son los momentos estadísticos de la densidad espectral $G(\omega)$; de esta forma reemplazando la ecuación 37 en la 36 obtenemos que:

$$\nu_a^+ = \frac{e^{-\frac{a^2}{2m_0^2}}}{\sqrt{2\pi m_0} \sqrt{2\pi m_2}} m_2^2 \quad (38)$$

la cual después de varias simplificaciones llega a una más sencilla expresión como:

$$\nu_a^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{m_2}{m_0} e^{-\frac{a^2}{2m_0^2}} \quad (39)$$

de esta forma teniendo la densidad espectral de un acelerograma o la extraída de la teoría sísmológica descrita es posible, reemplazando en la ecuación 39 encontrar el número de veces por unidad de tiempo que se sobrepasa un cierto valor de intensidad a ; mediante la ecuación 31 y con la duración es posible estimar el número esperado de ocasiones que se sobrepasa el mismo parámetro. Por ejemplo si se deseara conocer el número de cruces por cero de un proceso estocástico con densidad espectral conocida, el valor umbral en la ecuación 39 sería cero y el resultado sería simplemente:

$$n_o = \frac{1}{2\pi} \frac{m_2}{m_0} T_d \quad (40)$$

En Ingeniería sísmica T_d es la duración de la fase intensa del evento, que de acuerdo con Herrman y para el modelo omega cuadrada estudiado (1985) para terrenos firmes estaría dada por:

$$T_d = \frac{1}{f_c} + 0.05R \quad (41)$$

(r_0 en el caso de fuente finita, km) (70)

Aproximaciones de Herrman y de Atkinson y Boore, (1995) permitieron estimar la duración de la fase intensa correspondiente al 90% del contenido de energía como:

$$\log T_d = 0.207M_s + 0.264 \log R - 0.65 \pm 0.19 \quad (42)$$

donde M_s es la magnitud de ondas de superficie y R es la distancia en kilómetros. El cálculo de la duración de los sismos resulta ser de extrema utilidad para diferentes consideraciones en el diseño de las edificaciones contra sismos, no obstante, hasta el momento este parámetro no es usado como variable del diseño sismorresistente, esto a pesar de que se ha identificado que la energía inducida aun sistema depende mucho de la duración y numero de ciclos de un sismo. Por lo cual la degradación de las estructuras por medio de la cual las edificaciones van perdiendo rigidez por el agrietamiento progresivo de las secciones de concreto o por los efectos de fatiga sobre los elementos de acero no son tomadas en cuenta aún lo cual no quiere decir que no sea de mucha utilidad práctica.

Desde el punto de vista practico y del teórico también, una estructura no colapsa instantáneamente bajo las consideraciones de un máximo de aceleración o de desplazamiento, sino que para desarrollar mecanismos de colapsos necesita de un numero mínimo de excursiones de exceso de sobrecarga para incurrir en una degradación de sus elementos que la haga iniciar un colapso; de hecho, muchas de las edificaciones que sobreviven dañadas pero no colapsadas son muestras de un número insuficientes de ciclos de amplitudes que rebasan la resistencia y degradan la rigidez de las edificaciones. Las anteriores razones muestran la necesidad de conocer además de valores extremos de intensidades, la duración de la fase intensa de los movimientos, porque de aquí se desprenden una serie de variables y factores útiles en la estimación

de las respuestas no-lineales de edificaciones como una vía para la identificación del daño por sismos y del desarrollo de mecanismos de colapsos para el correcto cumplimiento de estos límites.

El número de ciclos y la duración es un factor muy importante en el desarrollo de la pérdida de capacidad portante de suelos, del desarrollo de la inestabilidad de talud y de la licuación de los suelos, a pesar de ello en estos casos tampoco ha sido tenido en cuenta estos parámetros para su estimación. Por ejemplo, la extraordinaria duración y numero de ciclos del sismo de Michoacán que se dejó sentir fuertemente México D.F., provocó la pérdida de la capacidad portante de los suelos de la ciudad generando el hundimiento apreciable de edificaciones con cimentaciones superficiales; también el fenómeno aceleró fuertemente la subsidencia del suelo que en algunos sitios llegó a ser de más de 15 cm, edificios piloteados hasta estratos resistentes virtualmente emergieron ante dicha subsidencia aguda.

Las definiciones de la duración de la fase intensa de los movimientos tienen diferentes planteamientos genéricos. Una primera aproximación de la duración de la fase intensa consiste en el lapso de tiempo que transcurre en un registro a partir de un valor umbral que se toma como inicio hasta el momento en que este valor umbral es rebasado por ultima vez, estos umbrales normalmente varían en aceleraciones que no superan los 0.03 y 0.05g; en este caso se tiene la desventaja de que se desconocen todas las excursiones de valores superiores dentro del intervalo escogido y en algunos sismos con epicentro en largas distancias pueden sobreestimar la duración de manera apreciable.

Una segunda forma de estimar la duración de una manera más racional consiste en sumar todos los intervalos de tiempo en que se rebasen los umbrales, concepto definido como «Duración uniforme», este método resulta menos sensible al valor del umbral pero por otro lado no tiene en cuenta el registro como un continuo sino que, en ocasiones, presenta saltos.

Otra forma de medir los registros esta basada en las llamadas duraciones significativas, la cual es basada en la acumulación de energía de los registros sísmicos representada por la integral del cuadrado de la velocidad del suelo, la cual esta directamente relacionada con la Intensidad de Arias. La duración significativa esta definida en el intervalo desde que es sobrepasado un nivel de energía, comúnmente definido como el 5% de la intensidad de Arias, hasta donde se considera relevante la contribución de ondas directas del sismo en la energía total definida como el 95% de la misma intensidad de Arias, gráficamente se puede deducir a partir del dibujo de la intensidad de Arias con respecto al tiempo que se denomina dibujo de Husid. Este concepto tiene la ventaja de considerar la duración de un evento de manera continua.

La última forma de cuantificar la duración de los sismos tiene origen en la sismología, y se basa en la estimación primaria de la duración de la ruptura del sismo en su origen, la cual puede estimarse a partir de la longitud de la ruptura, parámetro asociado a la magnitud y al momento sísmico, y a la velocidad de ruptura, que esta asociada a propiedades mecánicas de las rocas y caídas de esfuerzos. Naturalmente en este esquema es necesario tener en cuenta la distancia recorrida desde el epicentro ya que los continuos procesos de reflexión y refracción en el interior de la tierra y la llegada de estas a la superficie hacen que se incremente la duración inicial del sismo con la aparición de ondas superficiales, ondas reflejadas, ondas de coda, etc. En este esquema de definición de duración no es necesario el uso de acelerogramas pero por el contrario si es necesario la solución del mecanismo focal del sismo con todos los parámetros útiles en la definición de la densidad espectral de potencia.

La duración de la fase intensa de los movimientos tiene fuerte influencia en los daños, debido a que muchos procesos físicos como la degradación de rigidez y resistencia necesitan varios ciclos para poder generar mecanismos de daño

en las estructuras o incrementar la presión de poros hasta un punto tal que genere licuación, en ocasiones sismos cortos con altas aceleraciones no han generado daños considerables, mientras que sismos largos con aceleraciones moderadas si lo han hecho.

La duración esta asociada al tiempo necesario para liberar la energía en una fuente, por lo que su relación con la magnitud es directa; más exactamente con la raíz cúbica del momento sísmico; si la longitud, el área o el volumen de ruptura crece, la duración también lo hará; en cambio, si la velocidad de propagación de la ruptura aumenta, la duración disminuirá y cuando la ruptura es bilateral, es decir que la falla rompe en 2 sitios diferentes y viaja en direcciones opuestas como fue el caso del sismo de Loma Prieta en 1989 la duración también se reduce.

Como resumen para propósitos de ingeniería solo la porción de la fase intensa es útil y esta ha sido motivo de debate desde Bolt,(1969) que propuso la duración de la fase intensa como el tiempo transcurrido entre la primera y última excedencia de un valor mínimo umbral, normalmente de 0.05g; otra definición de duración esta basada (Trifunac y Brady, 1975) es basada en el intervalo de tiempo necesario para llevar la energía del sismo de 5 al 95%; otra medida común es mediante la suma de los tiempos t_{is} en que cierta aceleración umbral es superada; sin embargo, en los últimos años se ha venido aceptando de forma generalizada la estimación de duración de la fase intensa mediante el intervalo de tiempo necesario para llevar la intensidad de Arias del 5 al 95%. Una recopilación de las diferentes formas de estimar esta variable esta detallada en Bommer y Martínez-Pereira (1999).

2.2 Distribución de probabilidad de los máximos

Una vez más considerando una muestra de la función $x(t)$ que puede tener muchos picos tanto positivo como negativos como si mues-

tra en la figura 6 para un proceso estacionario y estocástico. Para fines de ingeniería dichos picos pueden ser de interés en el diseño de las estructuras.

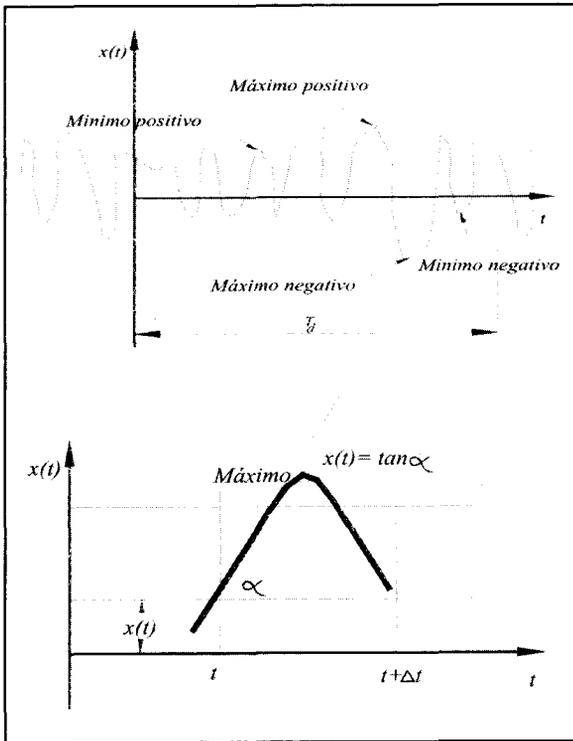


Figura 6. valores máximos y mínimos para un proceso estacionario.

Para la estimación de un máximo o un mínimo como vemos en la figura 6 abajo la velocidad de cambio de la amplitud se vuelve cero y existe un cambio de pendiente; por ello conviene, además, buscar la aceleración de cambio de amplitud y siguiendo la metodología del numeral anterior la densidad de probabilidades conjunta de la amplitud $x(t)$, la velocidad de cambio, $\dot{x}(t)$ de la amplitud y la aceleración de cambio de la amplitud, $\ddot{x}(t)$ esta dada mediante $p_{x\dot{x}\ddot{x}}(x, \dot{x}, \ddot{x})$.

La probabilidad acumulada conjunta se obtiene de la integral triple de la densidad de probabilidad conjunta con los límites de integración que se observan en la figura 7 que muestra el espacio de las variables de interés, de esta forma:

para intervalos de tiempo infinitesimales Δt tiende a ser cero por lo que la primera integral

$$P_m = \int_x^{x+\Delta x} \int_{\dot{x}=-\infty}^0 \int_{\ddot{x}=0}^{\ddot{x}\Delta t} p(x, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} d\ddot{x} dx \quad (43)$$

se puede simplificar; además para que exista un máximo de la amplitud es necesario un cambio de pendiente por lo que debe existir un punto de velocidad de cambio de la amplitud cero; de esta manera la expresión anterior se transforma en:

$$P_m = \left[\int_{\ddot{x}=-\infty}^0 p(x, \dot{x}=0, \ddot{x}) |\ddot{x}| \Delta t d\ddot{x} \right] (x + \Delta x - x) \quad (44)$$

$$P_m = \left[- \int_{-\infty}^0 p(x, 0, \ddot{x}) \ddot{x} d\ddot{x} \right] \Delta x \Delta t$$

donde $P_m/\Delta t$ puede ser interpretado como la frecuencia de los valores máximos en el intervalo $(x, x + \Delta x)$. La frecuencia de los valores extremos en todo el dominio puede ser evaluada a partir de:

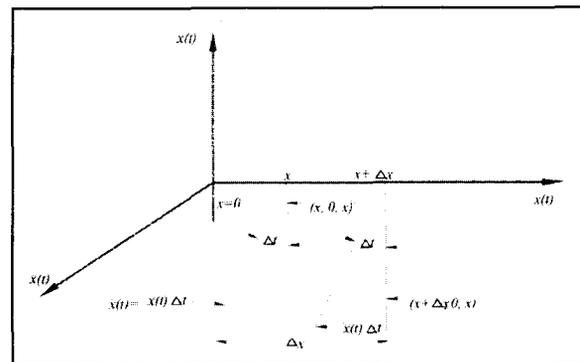


Figura 7. Volumen favorable para un máximo positivo en el intervalo de tiempo $t + \Delta t$

$$v_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[- \int_{-\infty}^0 p(x, 0, \ddot{x}) \ddot{x} d\ddot{x} \right] dx \quad (45)$$

finalmente la densidad de probabilidades de valores extremos se obtiene a partir de la relación entre los máximos en el segmento $x + Dx$ y la frecuencia de máximos en todo el dominio de la forma:

$$P_m(x) = \frac{\left[- \int_{-\infty}^0 p(x, 0, \ddot{x}) \ddot{x} d\ddot{x} \right]}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[- \int_{-\infty}^0 p(x, 0, \ddot{x}) \ddot{x} d\ddot{x} \right] dx} \quad (46)$$

Los procesos estacionarios estocásticos son Gaussianos, esto es, que el proceso es gobernado por distribuciones normales. Por ello para la ecuación anterior es necesario encontrar función de densidad de probabilidad conjunta que relacione la amplitud, el cambio de la amplitud con el tiempo y su aceleración de cambio, esta además también seguirá un proceso Gaussiano, por lo que la función conjunta normal propuesta toma la forma:

$$p(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}} \det D^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-v)^T D^{-1}(x-v)\right]$$

donde

$(x-v)^T = (x, \dot{x}, \ddot{x})$ con media cero y

$$D = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (47)$$

para este caso la matriz invertida esta dada mediante:

$$D^{-1} = \frac{1}{m_2(m_0m_4 - m_2^2)} \begin{bmatrix} m_2m_4 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (48)$$

donde m_n son los momentos estadísticos de orden n de la densidad espectral $G(\omega)$ definidos anteriormente. De esta manera la densidad conjunta de probabilidades queda descrita mediante:

$$p(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}} \det D^{\frac{1}{2}}} * \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{m_2m_4x^2 + m_0m_4\dot{x}^2 + m_2m_0\ddot{x}^2 + 2m_2^2x\dot{x}}{m_2(m_0m_4 - m_2^2)}\right] \quad (49)$$

y para el caso de velocidad de cambio de amplitud la expresión anterior se vuelve tan solo:

$$p(x, 0, \ddot{x}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}} \det D^{\frac{1}{2}}} * \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{m_0}{m_2} \frac{\frac{x^2 + 2m_2x\ddot{x} + \ddot{x}^2}{m_0m_4 - m_2^2}}{m_4}\right] \quad (50)$$

Proponiéndose hipótesis simplificatorias en términos del denominador $m_0m_4 - m_2^2$ como un valor siempre positivo e insertando en la ecuación 45 de la tasa por unidad de tiempo de valores máximos esperados:

$$v_{\max} = \frac{-1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{m_2(m_0m_4 - m_2^2)}} * \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{m_0}{m_4} \frac{\frac{x^2 + 2m_2x\ddot{x} + \ddot{x}^2}{m_0m_4 - m_2^2}}{m_0m_4}\right] \ddot{x} dx \quad (51)$$

realizando las integrales llegamos a que la tasa queda descrita en términos de:

$$v_{\max} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{m_2(m_0m_4 - m_2^2)}} \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{m_0m_4 - m_2^2}{m_4}} \quad (52)$$

y finalmente simplificando obtenemos que:

$$v_{\max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (53)$$

De esta manera para obtener el numero de valores extremos en un lapso de tiempo es necesario multiplicar la tasa de extremos por unidad de tiempo por la duración del evento de la forma:

$$n_{\max} = v_{\max} T_d \quad (54)$$

La densidad de probabilidad de los máximos se obtiene reemplazando las expresiones 50 y 47 en la expresión original 46 y toma la forma (siguiendo la notación de Cartwright y Longuett-Higgins-1956):

$$P_m(\eta_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\varepsilon^{\frac{\eta_x^2}{2\varepsilon^2} + \sqrt{1-\varepsilon^2}\eta_x} \exp\left[-\frac{\eta_x^2}{2\varepsilon^2}\right] \int_{-\infty}^{\frac{\eta_x\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] \quad (55)$$

en la cual $\eta_x = \frac{x}{m_0}$ (56)

y

$$\varepsilon^2 = \frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4} \circ \quad (57)$$

que es el parámetro introducido por Cartwright y Longuett-Higgins llamado parámetro de ancho de banda y que toma valores entre cero y uno. El parámetro de ancho de banda esta directamente relacionado con el ancho de banda de frecuencias y para valores de cero entonces define que el numero medio máximos es igual al numero de cruces por cero; es decir existe un máximo por cada cruce por cero. Esto corresponde a un proceso de banda estrecha que puede ser simplificado a una densidad de probabilidades de Rayleigh de la forma:

$$P_m(\eta_x) = \eta_x \exp\left[-\frac{\eta_x^2}{2}\right] \quad (58)$$

por el contrario si el parámetro de ancho de banda es uno, entonces el sistema toma densidad de probabilidad normal o Gaussiana de la forma:

$$P_m(\eta_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\eta_x^2}{2}\right] \quad (59)$$

2.3 Distribución De Probabilidad De Los Valores Picos

En muchas aplicaciones de la ingeniería sísmica es necesario encontrar los valores pico dependientes de los máximos que se pueden esperar de un proceso y como se podría esperar estos valores picos están relacionados a la cantidad de máximos anteriormente evaluados. Siguiendo a Powell es fácil hacer uso de la teoría para encontrar el numero de máximos proponiendo una vez más una función $x(t)$ observada en un tiempo T_d . La distribución de probabilidad de los picos escogida como aleatoria para un valor $x=a$ que es excedido tiene la forma:

$$P[\text{pico} > a] = \int_a^{\infty} P_p(x) dx \quad (60)$$

donde $P_p(x)$ es la densidad de probabilidad; teniendo en cuenta que en la duración del evento el proceso puede tener $n_0 T_d$ numero de cruces por cero y $n_a T_d$ cruces sobre una intensidad $x=a$ en promedio. La fracción favorable de volumen en el espacio para picos mayores de los valores extremos de $x=a$ es propuesta simplemente por:

$$\frac{v_a^+ T_d}{v_0^+ T_d} = \frac{v_a^+}{v_0^+} = \int_a^{\infty} P_p(x) dx \quad (61)$$

derivando la ecuación anterior con respecto al valor umbral a para buscar los máximos obtenemos que:

$$-P_p(x) = \frac{1}{v_0^+} \frac{dv_a^+}{da} \quad (62)$$

la cual es la expresión general para la densidad de probabilidades de picos de un proceso de banda estrecha . Para procesos Gaussianos la frecuencia de cruces por un valor umbral a esta descrita como definimos según la ecuación 39, por lo que al reemplazar en la ecuación 62 es posible obtener que:

$$-P_p(a) = -\frac{a}{m_0^2} e^{-\frac{a^2}{2m_0^2}} \quad (63)$$

siguiendo los planteamientos de Davenport la anterior expresión de la distribución de los valores picos con respecto a los valores cuadráticos medios queda como una función de los valores extremos n_{max} como:

$$P_E \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) = \left[P_M \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) \right]^{n_{max}}$$

$$P_E \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) = \exp \left[-v T_d \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right)^2 \right) \right] \quad (64)$$

donde $v = \frac{v_{max}}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$

para obtener los máximos de la distribución anterior es necesario derivarla con respecto a la relación entre valores medios y picos como:

$$P_M \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm \ max}} \right) = \frac{\partial P \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm \ max}} \right)^{n_{max}}}{\partial \frac{a_{pico}}{a_{cm \ max}}} \quad (65)$$

que toma la forma aproximada

$$\frac{dP_M}{d \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right)} = n_{max} P_M^{n_{max}-1} P_M \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) \quad (66)$$

el desarrollo de esta expresión llega a que:

$$P_M \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) = n_{max} \left[\phi \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) - \sqrt{2\pi} k \phi \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) \phi \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right)^{n_{max}-1} \right]^*$$

$$* \left[\frac{1}{\epsilon} \phi \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) + \sqrt{2\pi} k \phi \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) \phi \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right)^k - \frac{k}{\epsilon} \phi \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right)^k \right]$$

donde:

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{y } k^2 = 1 - \epsilon^2$$

A partir de esta ecuación es posible calcular los momentos estadísticos de la relación entre picos y medios de forma simple mediante:

$$E \left(\frac{a_{pico}^k}{a_{cm}} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{pico}^k}{a_{cm}} P_M \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm \ max}} \right) d \frac{a_{pico}}{a_{cm \ max}} \quad (67)$$

De esta última expresión puede demostrarse (Cartwright y Longuett-Higgins, 1956; Davenport, 1964) que si el logaritmo natural de n_{max} no es demasiado pequeño, son válidas las siguientes aproximaciones asintóticas:

$$E \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm \ max}} \right) = \sqrt{2 \ln(v_{max} T_d)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(v_{max} T_d)}} \quad (68)$$

donde γ es la constante de Euler (= 0.5772..) y por consiguiente el valor al cuadrado del valor esperado de la relación entre picos y cuadráticos medios es

$$E \left(\frac{a_{pico}^2}{a_{cm}} \right) = \sqrt{2 \ln(v_{max} T_d)} + 2\gamma \frac{1}{2 \ln(v_{max} T_d)} + \frac{\gamma^2}{\sqrt{2 \ln(v_{max} T_d)}} \quad (69)$$

por lo que su varianza es:

$$\text{var} \left(\frac{a_{pico}}{a_{cm}} \right) = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{2 \ln(v_{max} T_d)} \quad (70)$$

3. APLICACIONES EN INGENIERÍA SÍSMICA

Ya que los procesos sísmicos están descritos mediante su espectro de amplitudes de Fourier como se describieron en las secciones anterior-

res y además son considerados procesos estocásticos y estacionarios, entonces toda la teoría de valores extremos anteriormente expuesta puede ser usada con las adaptaciones respectivas. A la relación entre el valor pico y el valor cuadrático medio se le suele denominar «factor pico»:

$$FP = \frac{a_{\max}}{a_{cm}} \quad (71)$$

De esta forma una vez se cuenta con el factor pico es posible encontrar la intensidad pico correspondiente que interese en términos de su valor cuadrático medio como:

$$a_{\max} = FP * a_{cm} \quad (72)$$

reemplazando en las expresiones derivadas y usando el espectro de amplitudes de la intensidad que interese ser evaluada. En este capítulo fueron derivados con anterioridad las expresiones para espectros de amplitudes de Fourier de aceleraciones, $A(f)$ (ecuaciones 28 y 29) por lo que si aplicamos la teoría de vibraciones aleatorias para este caso y reemplazamos en las ecuaciones 53, 68 y 72 llegamos a obtener que la aceleración esperada máxima de los espectros derivados de teoría sismológica es:

$$E[A_{\max}] = \sqrt{2 \ln \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4(A(f))}{m_2(A(f))}} \right) T_d \sqrt{m_0(A(f))}} + \sqrt{\frac{\gamma}{2 \ln \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4(A(f))}{m_2(A(f))}} T_d \right)}} \sqrt{m_0(A(f))} \quad (73)$$

donde siguiendo la definición de momento estadístico para los $A(f)$ de aceleración

$$m_4(A(f)) = \frac{32\pi^4}{T_d} \int_{-\infty}^{\infty} (f)^4 A(f) df \quad (74)$$

$$m_2(A(f)) = \frac{8\pi^2}{T_d} \int_{-\infty}^{\infty} (f)^2 A(f) df \quad (75)$$

y

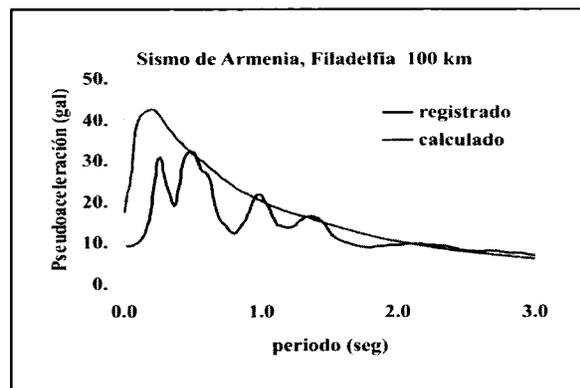
$$m_0(A(f)) = \frac{2}{T_d} \int_{-\infty}^{\infty} A(f) df = A_{cm}^2 \quad (76)$$

En vista de las ecuaciones 10, 28, 29, 41, 54, 73, 74, 75 y 76, es posible estimar A_{\max} si se conocen el EAF y la duración de fase intensa de un sismo. A_{\max} resulta ser entonces una función del momento sísmico, de la distancia focal, y de los parámetros libres D_s , Q_0 , ϵ , k_1 , Q_1 , ρ , β y $R_{\theta\phi}$. Por otra parte, entre el momento sísmico y la magnitud existe la siguiente relación propuesta por Hanks y Kanamori (1979):

$$\text{Log}_{10}(M_0) = 1.5M_w + 16.1 \quad (77)$$

donde M_w es la magnitud de momento. En estas condiciones, puede estimarse A_{\max} como función de magnitud y distancia si se conocen los parámetros libres Δs , Q_0 , ϵ , k_1 , Q_1 , ρ , β y $R_{\theta\phi}$.

Contando con el EAF de cualquier tipo de variable complementaria como velocidad, desplazamiento o energía y la duración de la fase intensa del evento, el proceso es igualmente posible de realizar usando funciones de transferencia de osciladores de un grado de libertad; comparaciones con la realidad durante el sismo de Armenia de 1999 se observan a continuación.



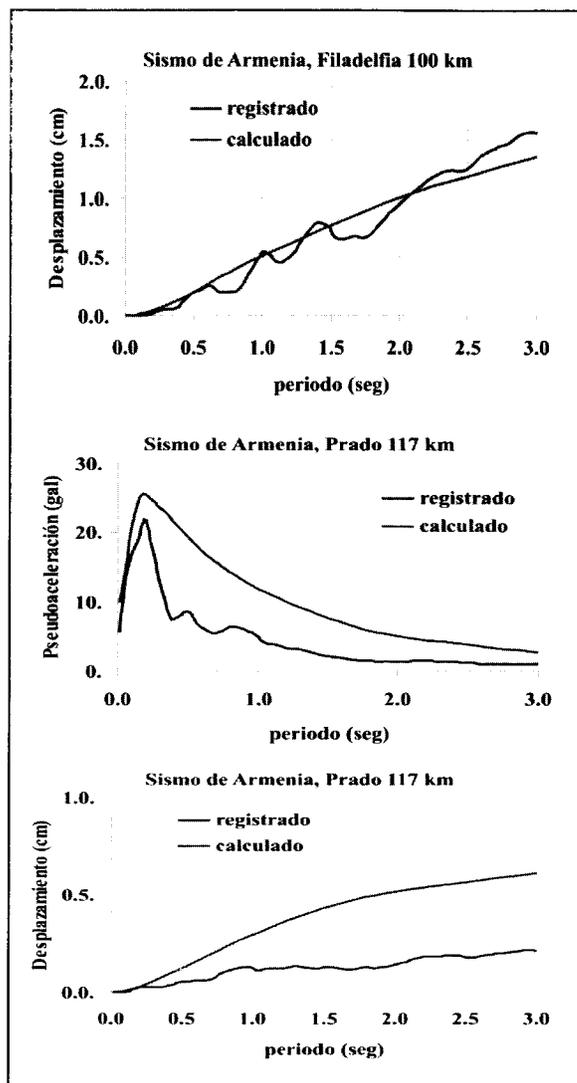


Figura 9. Espectros de respuesta de pseudoaceleración y desplazamiento estimados y registrados en dos estaciones en terreno firme durante el sismo de Armenia de 1999.

4. CONCLUSIONES

El procedimiento propuesto y explorado en este trabajo para estimación de variables sísmicas en el caso colombiano, basado en modelos sísmológicos aceptados, es definitivamente más eficiente en el manejo de la información registrada, cuando se utiliza ésta sólo para estimar los parámetros de un modelo físico que señala las variables involucradas y, además, comportamientos muy claros. El modelo igualmente permite un manejo transparente de los efectos locales a través de la inclusión de funciones de

transferencia que multiplican el *EAF* en el basamento rocoso, convirtiéndose en otra función correctora del modelo de ruptura propuesto.

Al ser el *EAF* del movimiento el objetivo del procedimiento, posibilita, a través de la Teoría de Vibraciones Aleatorias, la estimación de cualquier respuesta, particularmente máximas, del suelo o de las edificaciones: desplazamientos y velocidades máximas del terreno, espectros de respuesta, *EAF* de la respuesta de una estructura particular descrita a través de su función de transferencia, etc. Esta generalidad evita la estimación de leyes de atenuación para cada respuesta máxima que quiera ser estimada, y hace coherentes todas las respuesta entre si por venir de un mismo modelo basado en los mismos parámetros físicos y teóricos.

Ya que la tendencia mundial de la ingeniería sísmica ha ido adoptando los modelos sísmológicos mediante procesos estocásticos, resulta apenas necesario el hecho de empezar a aplicar el modelo a la realidad colombiana.

5. AGRADECIMIENTOS

Mis agradecimientos para el Dr. Luis Esteva Maraboto, Mario Ordaz Schroeder y Ernesto Heredia Zavoni que me involucraron en esa elite de ingenieros que entendieron desde un principio la naturaleza aleatoria, estocástica y probabilística de la ingeniería real, algo muy lejano del determinismo que se maneja en los regímenes y códigos actuales de la ingeniería civil.

6. REFERENCIAS

- Aki, K (1968) «Seismic displacement near a fault», Journal of Geophysics Researchs, vol 73, 5359-5376.
- Aki, K y Richards P (1980), «Quantitative Seismology: Theory and methods» Freeman and Company, San Francisco, California, USA.
- Aki, K. (1967). Scaling law of seismic spectrum, *J. Geophys. Res.* 72, 1217-1231.
- Amin, M y Ang, A H-S (1968) «Non stationary stochastic models of earthquakes», *Journals of engineering Mechanics*, ASCE, vol 94, EM2, pp 559-583

- Anderson, J. G. And S. Hough (1984). A model for the shape of the Fourier amplitude spectrum of acceleration at high frequencies, *Bull. Seism. Soc. Am.* 74,1969-1994.
- Boore, D. M. y W. B. Joyner (1984). A note on the use of random vibration theory to predict peak amplitude of transient signals, *Bull. Seism. Soc. Am.* 74,2035-2039.
- Boore, D. M. (1983). Stochastic simulation of high-frequency ground motion based on seismological models of radiated spectra, *Bull. Seism. Soc. Am.* 73,1865-1884.
- Boore, D. M. (1986). The effect of finite bandwidth on seismic scaling relationship, Earthquake Source Mechanic, *Geophysical monograph 37* (Maurice Ewing 6), American Geophysical Union, 275-283
- Boore, D. M. and G. M. Atkinson (1987). Stochastic prediction of ground motion and spectral response parameters at hard rock sites in eastern North America, *Bull. Seism. Soc. Am.* 77,440-467.
- Boore, D. M. y J. Boatwright (1984). Average body wave radiation coefficients, *Bull. Seism. Soc. Am.* 74,1615-1621.
- Brune, J. N. (1970). Tectonic Stress and the spectra of seismic S waves from earth, *J. Geophys. Res.* 75, 4997-5009.
- Brune, J. N. (1976). The physics of earthquakes string motion, *Seismic Risk and Engineering Decisions*, editors, Lomnitz and Rosenblueth, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam
- Cartwright, D. E. y M. S. Longuett Higuins (1956). The statistical distribution of the maxima of a random function, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. 76*, 5002.
- Castro, R., Singh, S.K., y Mena, E. (1988), An empirical model to predict Fourier amplitude spectra of horizontal ground motion, *Earthquake Spectra*, 4, 675 686.
- Clough, R. W. & Penzien, J. *Dynamics of structures*, Mc Graw Hill, New York, 1975.
- Cornell, C.A. y E. Vanmarcke (1969). The mayor influences on seismic risk. *Proc., 4th WCEE*, Santiago de Chile, vol.I,A-1,69-83.
- Davenport A G (1964) «note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading», *Proc. Inst. of C. E.* 28,187-196
- Davis, P.J. (1964). «Gamma function and related functions», in *Handbook of Mathematical Functions*, M. Abramowitz and I. Stegun, editors, Dover Publications Inc., New York.
- Gautschi, W y Cahill, W, F (1965), Exponential integral and related functions, *Handbook of mathematical functions*, M Abramowitz and I, Stegun, Dover publication, New york.
- Gutenberg and Richter (1956), Earthquake magnitude, intensity, energy and acceleration, *Bull. Seism. Soc. Am.* 46, 105-145.
- Hanks, T C (1982), f_{max} , *Bull. Seism. Soc. Am.* 72, 1867-1879.
- Haskell N A (1964) « Radiation patterns of surface waves from point sources in a multi-layered medium, *Bull Seism Soc Am*, vol 54, pp 377-393.
- Haskell, N (1966), Total energy and energy spectral density of elastic waves radiation from propagating faults , 2, a statistical source model, *Bull. Seism. Soc. Am.* 56, 125-140.
- Haskell, N (1969), «Elastic displacement in the near-field of propagation fault», *Bull. Seism. Soc. Am.* 59, 865-908.
- Hermann, R B (1985), An extension of random vibration theory estimates of strong ground motion to large distances, *Bull. Seism. Soc. Am.* 73, 157-171.
- Idriss, I.M. (1985), «Response of soft soil sites during earthquakes,» in J.M. Duncan, Ed., *Proceedings, H. Bolton Seed Memorial Symposium*, BiTech Publishers, Vancouver, British Columbia, Vol. 2, pp- 273-289.
- Kanamori, H (1977) «The energy release in great earthquakes», *J. Geophys. Res.* vol 82, 2981-2987
- Kanamori, H y Anderson, D L (1975) «Theoretical basis of some empirical relation en seismology», *Bull Seism Soc Am*, Vol 65, pp 1073-1095.
- Knopoff, L (1964), «Q», *Review of Geophysics*, 2 625-660**
- Love, A E H (1944) « *A treatise on the mathematical theory of elasticity*», Dover publication, New york
- Luco J. E. (1985). On strong ground motion estimates based on models of the radiated spectrum, *Bull. Seism. Soc. Am.* 75,641-650.
- McGuire, R.K. (1973), «Seismic structural response risk analysis incorporating peak response regressions on earthquake magnitude and distance, MIT, Department of civil engineering, *research report R74-51*
- McGuire, R.K. (1978), A simple model for estimating Fourier amplitude spectra of horizontal ground accelerations, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 68, 803 822.
- Newmark, N M and Rosenblueth, E. (1971); *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Orowan, E (1960) «Mechanism of seismic faulting» en «Rock deformation a symposium», D Griggs y J Handin editores, *Geological society of America*, Memoir 79, pp 323-345.
- Papageorgiou, A. And Aki, K. (1985), Scaling Law of far -field spectra based on observed parameters of the specific barrier model, *PAGEOPH* 123, 353-374.
- Papoullis, A (1965) Probability, *Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw Hill, Nueva york
- Reid, H. F. (1969) « Mechanism of the earthquake», en *The California earthquake of April 18 of 1906*. Carnegie Institute of Washington D.C.
- Stokes, G. G, (1849) «Dinamical Thoery of diffraction» *Cambridge phil soc, trans*, vol 9
- Udwadia, F. E. and M. D. Trifunac, (1974), Characterization of response spectra through statistics of oscillators response, *Bull. Seism. Soc. Am*
- Vanmarcke, E.H. (1976). «Structural Response to Earthquakes», in *Seismic Risk and Engineering Decisions*, C. Lomnitz and E. Rosenblueth, editors, Elsevier Publishing Co., Amsterdam.
- Wells D. L. y Coppersmith K. J (1994). New Empirical Relationships among Magnitude, Rupture Length, Rupture Width, Rupture Area, and Surface Displacement. *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 84, No. 4, pp.974-1002.