

# Eficiencia técnica de los centros educativos distritales en Bogotá D.C.

## Una jerarquización de 476 unidades educativas realizada utilizando la técnica de Frontera Estocástica.

### Hernando Mutis PhD.

Profesor Asociado. Departamento de Ingeniería Industrial.  
Universidad de los Andes.

### Gloria Maritza Díaz Torres M.I.

Instructora. Departamento de Ingeniería Industrial.  
Universidad de los Andes.

#### PALABRAS CLAVE

Eficiencia técnica productiva, componentes principales, frontera de producción estocástica, máxima verosimilitud, función de producción Cobb-Douglas, función de distribución seminormal.

#### KEYWORDS

Technical Efficiency, Principal components, Stochastic Frontier Production Function, maximum likelihood, Cobb-Douglas production function, half normal distribution function.

**RESUMEN** Este documento presenta, en una primera parte, los elementos teóricos básicos de la estimación de fronteras de producción estocásticas con el objetivo, en una segunda parte, de jerarquizar 476 Centros Educativos Distritales de la ciudad de Bogotá de acuerdo a la medida de eficiencia técnica –utilización de insumos para maximizar la cantidad producida-. Para la aplicación presente se postula una función de producción como la Cobb-Douglas a la que se le añaden las perturbaciones de ruido (simétricas) y de eficiencia (seminormal) y, usando máxima verosimilitud, se estiman los parámetros de interés y se calcula la eficiencia para cada entidad.

**ABSTRACT** In the first part of this paper the basics of the estimation of the stochastic production function is discussed. In the second part an application of the former is presented aimed at the hierarquization of the educational institutions which depend of the District of Bogotá, according to a measure of the technical efficiency –using inputs to maximize the output. For the present, a Cobb-Douglas production function is assumed with a symmetric noise and a semi-normal efficiency perturbations. Using maximum likelihood the parameters are obtained and the efficiency for each institution is calculated.

**1. INTRODUCCIÓN**

La estimación de la Frontera de Producción Estocástica o Frontera Estocástica (FE) está asociada a la consideración de que existe un nivel de producción en el que se encuentran las unidades productivas más eficientes –aquellas que utilizan los insumos de manera tal que se maximiza la cantidad producida–. Determinada esta frontera, las restantes unidades productivas se sitúan en relación a ésta y se examina el nivel relativo de ineficiencia de cada una de ellas. Para el caso de este documento las “unidades productivas” son las instituciones educativas que dependen del Distrito. En la sección segunda de este artículo se presenta un resumen de los elementos teóricos básicos de la FE. En las dos siguientes secciones se esbozan las características principales del conjunto de datos analizado y de la metodología utilizada, respectivamente, y, en la última sección, se recogen los principales resultados.

**2. EL MODELO DE LA FRONTERA DE PRODUCCIÓN ESTOCÁSTICA.**

El concepto de eficiencia técnica se refiere a la capacidad de una unidad productiva para obtener el máximo producto dado un conjunto particular de insumos. Esta eficiencia involucra el conocimiento de la existencia de una frontera de producción en la que están ubicadas las entidades más productivas. No obstante, esta frontera de producción no se conoce y se debe estimar. En esta sección se esbozará una síntesis de los aspectos básicos de la conceptualización teórica y se seguirá muy cercanamente el enfoque de Kumbhakar y Knox [1].

Aigner, Lovell & Schimdt [2] y Meeusen & Van Der Broeck [3] simultáneamente introdujeron los modelos de producción de frontera estocástica. La función de producción más comúnmente usada es la conocida Cobb-Douglas y una forma de presentarla es y

$= X\beta$ , donde  $y$  es el vector del logaritmo natural del producto obtenido y la matriz  $X$  está compuesta por una columna de unos y por el logaritmo natural de cada uno de los insumos involucrados en el proceso.

La formulación estadística de esta función incluye la adición de un término de perturbación estocástica,  $\epsilon$ , de tal forma que la anterior expresión se reformula como  $y = X\beta + \epsilon$ . Este último término –y en esto consiste el aporte inicial de la conceptualización de la FE–, usualmente se presenta para la  $i$ ésima unidad productiva como  $\epsilon_i = (v_i - u_i)$  en el que se enfatiza que la perturbación aleatoria está integrada por dos elementos: uno, el ruido,  $v_i$ , y otro, el de la ineficiencia  $u_i$ , el cual se considera no negativo. Se asume que  $v_i$  y  $u_i$  están independiente e idénticamente distribuidos con varianzas dadas por  $\sigma_v^2$  y  $\sigma_u^2$ , respectivamente. Por lo regular se asume que  $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ .

Dado que la producción de una firma particular puede expresarse como  $Y_i = f(x_{1i}, \dots, x_{ki}; \beta) \exp(v_i - u_i)$ , en tanto que el nivel eficiente de producción o frontera estimada es  $Y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}; \beta) \exp(v_i)$ , entonces, la razón de la producción de la firma con respecto a la de la frontera es:  $\exp(-u_i)$ . Y esta razón mediría la eficiencia técnica de la  $i$ ésima firma (ET):  $ET_i = \exp(-u_i)$ .

Se ha planteado que la distribución aleatoria del término referente a la eficiencia técnica puede ser semi-normal<sup>1</sup>:  $u = |U|$ ,  $U \sim N[0, \sigma_u^2]$ . De la consideración  $y = X\beta + \epsilon$ , con  $\epsilon_i = (v_i - u_i)$ , se concluye que en tanto  $v_i$  es simétrico y  $u_i$  es no negativo, entonces  $\epsilon_i$  es asimétrico y por tanto al aplicar el operador esperanza se encuentra que  $E \epsilon_i = E (v_i - u_i) = -E u_i < 0$ .

La estimación del modelo por cuadrados mínimos ordinarios ofrece una forma inicial de examinar la conveniencia del modelo de ineficiencia técnica: Si  $u_i > 0 \Rightarrow \epsilon_i = (v_i - u_i)$  es sesgada y habría evidencia de ineficiencia técnica. Si  $u_i = 0 \Rightarrow \epsilon_i = (v_i - u_i)$

<sup>1</sup> Otras formas que se han desarrollado son funciones de densidad de probabilidad como la normal truncada, la gamma y la exponencial.

es simétrica y los datos no ofrecerían evidencia de ineficiencia técnica.

Se quiere estimar la especificación  $y_i = X_i\beta + \varepsilon_i$ ;  $\varepsilon_i = v_i - u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  unidades. Las funciones de densidad de  $u$  (normal) y de  $v$  (seminormal) son:

$$f(u) = 2(2\pi\sigma_u^2)^{-1/2} \exp[-u^2(2\sigma_u^2)^{-1}]$$

$$f(v) = (2\pi\sigma_v^2)^{-1/2} \exp[-v^2(2\sigma_v^2)^{-1}]$$

Dado el supuesto de independencia entre  $u$  y  $v$ , entonces la densidad conjunta de  $v$  y  $u$  es el producto de sus densidades individuales:

$$f(u, v) = 2(2\pi\sigma_v\sigma_u)^{-1} \exp[-v^2(2\sigma_v^2)^{-1} - u^2(2\sigma_u^2)^{-1}]$$

Como  $\varepsilon = v - u$ , entonces la densidad conjunta de  $u$  y  $\varepsilon$  es  $f(u, \varepsilon) = 2(2\pi\sigma_v\sigma_u)^{-1} \exp[-v^2(2\sigma_v^2)^{-1} - (\varepsilon + u)^2(2\sigma_u^2)^{-1}]$

La densidad marginal de  $\varepsilon$  se obtiene integrando a  $u$  de  $f(u, \varepsilon)$  a través de (los límites de la integral están entre cero e infinito):

$$f(\varepsilon) = \int f(u, \varepsilon) du = 2\sigma^{-1} \phi(\varepsilon \sigma^{-1}) \Phi(-\varepsilon \lambda \sigma^{-1})$$

Donde  $\sigma = [\sigma_u^2 + \sigma_v^2]^{1/2}$

$$\lambda = \sigma_u / \sigma_v$$

$\phi(t)$  y  $\Phi(t)$ : funciones de densidad y de distribución normal estándar, respectivamente.

Se decía que  $f(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, \varepsilon) du = 2\sigma^{-1} \phi(\varepsilon \sigma^{-1}) \Phi(-\varepsilon \lambda \sigma^{-1})$

De esta forma, el logaritmo natural de la función de verosimilitud para una muestra de  $n$  productores sería con  $k$  una constante [1]:

$$\ln L = k - 2n \ln \sigma + \sum \ln \Phi(-\varepsilon \lambda \sigma^{-1}) - (2\sigma^2)^{-1} \sum \varepsilon_i^2$$

Y esta función se maximiza para obtener los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros de interés.

El problema siguiente es la obtención de los estimados de la eficiencia técnica para cada productor. En este modelo se cuenta con estimados de  $\varepsilon_i = v_i - u_i$ , los cuales contienen información sobre  $u_i$ . Si  $\varepsilon_i > 0$ , entonces  $u_i$  no es muy grande ( $E v_i = 0$ ) lo cual sugeriría que este productor es relativamente eficiente. En cambio si  $\varepsilon_i < 0$ , entonces  $u_i$  es muy grande y se considera que este productor es relativamente ineficiente.

El problema es, entonces, lograr separar la información que  $\varepsilon_i$  contiene sobre  $u_i$ : una solución al asunto viene de la obtención de la distribución condicional de  $u_i$  dado  $\varepsilon_i$ . Jondrow *et al* [4] encontraron que si  $u_i \sim N^+(0, \sigma_u^2)$ , entonces

$$f(u | \varepsilon) = \frac{f(u, \varepsilon)}{f(\varepsilon)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} e^{-\frac{(u - \mu_*)^2}{2\sigma_u^2}}}{1 - \Phi\left(\frac{-\mu_*}{\sigma_u}\right)}$$

Donde

$$\mu_* = -\frac{\varepsilon\sigma_u^2}{\sigma^2}$$

$$\sigma_*^2 = \frac{\sigma_u^2\sigma_v^2}{\sigma^2}$$

La idea de la estimación es obtener la función de verosimilitud, calcular los parámetros de interés y estimar la eficiencia técnica para cada unidad:  $ET_i = \exp(-\hat{u}_i)$

Como  $f(u, \varepsilon) \sim N(\mu_*, \sigma_*^2)$  entonces Jordrow *et al* [4] plantean que un estimador puntual para  $u_i$  se obtendría de

$$E(u_i / \varepsilon_i) = \mu_* + \sigma_* \frac{-\phi(\mu_*/\sigma_*)}{1 - \Phi(\mu_*/\sigma_*)}$$

$$E(u_i / \varepsilon_i) = \sigma_* \left[ \frac{\phi(\lambda\varepsilon_i/\sigma)}{1 - \Phi(\lambda\varepsilon_i/\sigma)} - \frac{\varepsilon_i \lambda}{\sigma} \right]$$

Así...

$$E(u_i / \varepsilon_i) = \sigma_* \left[ \frac{\phi(\lambda\varepsilon_i/\sigma)}{1 - \Phi(\lambda\varepsilon_i/\sigma)} - \frac{\varepsilon_i \lambda}{\sigma} \right]$$

$$\mu(u_i / \varepsilon_i) = \left\{ \begin{array}{ll} -\varepsilon_i \left( \frac{\sigma_u^2}{\sigma^2} \right) & \text{Si } \varepsilon_i \leq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

Con los estimadores puntuales de  $u_i$  entonces los estimadores de la eficiencia técnica de cada productor se calculan de  $ET_i = \exp(-\hat{u}_i)$ , con  $\hat{u}_i$  obtenido de alguna de las expresiones recién presentadas.

Battese & Coelli [5] propusieron un estimador alternativo para la  $ET_i$ , el cual es el más utilizado en el trabajo empírico:

Aunque hay otras formulaciones sobre el comportamiento del término  $u_i$ , el esbozo anterior es suficiente para abordar el trabajo aplicado. A pesar de que se ha considerado que los estimados de la eficiencia técnica podrían ser inconsistentes<sup>2</sup>, no obstante, a nivel de estudios de corte transversal el procedimiento puede dar luces sobre la cercanía (o lejanía) relativa de las unidades con respecto a la frontera ideal de producción.

Como procedimiento general para seguir, se puede afirmar que los modelos propuestos dependerán del objetivo de la investigación, de los supuestos sobre el

comportamiento de las unidades, de la distribución asumida de la eficiencia técnica y de la disponibilidad de los datos.

Un punto muy importante a considerar es el efecto de la distribución que se asume para el término  $u$ . Se considera que aunque las eficiencias técnicas son muy sensibles a la forma de la distribución, la jerarquización de las unidades productivas no se afecta de manera notable sobre todo en la configuración de los grupos extremos: Greene [6] en un panel de 123 empresas eléctricas encontró que el coeficiente de correlación por rangos entre los pares de los estimados de la eficiencia para todas las observaciones muestrales estuvieron entre .7467 (exponencial y gamma) y .9803 (seminormal y normal truncada). Estos resultados apoyan el que el uso de una distribución como la seminormal da resultados alentadores en la definición de las ineficiencias técnicas de las unidades involucradas.

## 2. EL PROBLEMA Y LOS DATOS

El propósito de esta aplicación es estudiar la eficiencia técnica de los centros educativos distritales a partir de la información sobre insumos y productos. Los insumos (o entradas) se van a referir a una estructura particular de costos y los productos (o salidas) hacen relación a los niveles de avance educativo alcanzados medidos por los resultados de Pruebas de Competencias que practica la Secretaría de Educación.

La información que se trabaja en este documento fue obtenida de los resultados de las Pruebas de Competencias Básicas efectuadas por la Secretaría de Educación Distrital en 2001. Las pruebas recogen la información de los estudiantes de séptimo y noveno grado. En el estudio se incluyeron 273 entidades educacionales del distrito. En el análisis están incluidas las jornadas educativas de la mañana, tarde y noche, y se cubren las 19 localidades del distrito.

<sup>2</sup> Este es un problema cuando se tiene un tamaño de muestra muy pequeño. En esta aplicación, el número de observaciones es de 476, cifra que coadyuva a disminuir la inconsistencia de los estimados.

Cuando un centro educativo está conformado por más de dos jornadas, se consideran éstas como unidades educativas separadas, de esta forma los centros en consideración alcanzaron la cifra de 476.

Como variables de entrada se consideraron inicialmente las siguientes ( medidas en costos por alumno):

- costos de docentes entre las categorías 0 y 9 (doc9),
- costos de docentes entre las categorías 10 y 12 (doc1012),
- costos de docentes entre las categorías 13 y 14 (doc1314),
- costos asociados a las directivas de la institución (direct),
- costos administrativos (admi),
- costos de materiales asociados directamente con el proceso educativo (educ),
- costos de materiales asociados indirectamente con el proceso educativo (noeduc).

Como variables de salida se incluyeron:

- prueba de competencias básicas de lenguaje (len),
- prueba de competencias básicas de matemáticas (mat),
- prueba de competencias básicas de ciencias (cien),
- prueba de lenguaje de nivel 2 (lenn2),
- prueba de matemáticas de nivel 1 (matn1),
- prueba de matemáticas de nivel 2 (matn2),
- prueba de ciencias de nivel 1 (cienn1),
- prueba de ciencias de nivel 2 (cienn2),
- prueba relacionada a los conocimientos del estado colombiano (est).

### 3. LA METODOLOGÍA UTILIZADA

La idea de la estimación es obtener la función de verosimilitud, calcular los parámetros de interés y estimar la eficiencia técnica para cada unidad. Dado que el modelo de frontera estocástica no considera más de un producto se utilizó el primer componente principal de los puntajes de las pruebas. El Tabla 1 muestra que el primer componente principal absorbe el 69 % de la variabilidad total del conjunto analizado.

Eigenvalues of the Correlation Matrix

	Eigenvalue	Difference	Proportion	Cumulative
1	6.18738729	5.21956116	0.6875	0.6875
2	0.96782613	0.35680770	0.1075	0.7950
3	0.61101844	0.03852409	0.0679	0.8629
4	0.57249435		0.0636	0.9265

Tabla 1

Al ojear los eigenvectores en la Tabla 2, se aprecia que el primer componente principal, bautizado en la tabla como "Puntaje1" no es más que un promedio ponderado de las variables originales.

El siguiente paso es efectuar una primera aproximación por CMO del modelo propuesto utilizando como variable dependiente el logaritmo natural del primer componente principal (escalado para evitar valores negativos) y como variables independientes a las referidas a los costos, expresados en términos de

### Eigenvectors

		Puntaje1	Puntaje2	Puntaje3	Puntaje4
len	Lenguaje	0.350058	0.177273	-.283416	-.477174
mat	Matemáticas	0.363572	-.183252	-.208017	0.343248
cien	Ciencias	0.378266	0.005821	0.243191	-.059373
lenn2	Lenguaje N_2	0.351010	0.144164	-.263633	-.487897
matn1	Matemáticas N_1	0.354751	-.070656	-.276386	0.118770
matn2	Matemáticas N_2	0.336146	-.241063	-.194215	0.491326
cienn1	Ciencias N_1	0.308906	-.083369	0.741760	-.126801
cienn2	Ciencias N_2	0.356221	-.107242	0.277268	0.050841
est	Conocimientos Estado	0.133501	0.912481	0.081033	0.372487

Tabla 2

sus logaritmos naturales. En esta etapa se analiza el comportamiento de los residuales para determinar la factibilidad de utilizar el modelo de eficiencia técnica.

Posteriormente se estiman los parámetros del modelo usando máxima verosimilitud y se calculan las eficiencias técnicas para cada unidad educativa. Encontrados estos resultados se ordenan para detectar las entidades más eficientes. Eficiencia, en este contexto, está referido exclusivamente al ejercicio económico que liga las particulares variables bajo estudio para el conjunto de las 476 unidades educacionales.

#### 4. LOS RESULTADOS.

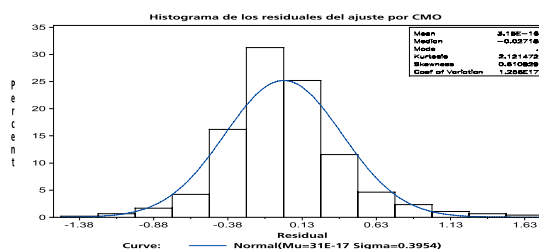
La primera aproximación por CMO del modelo propuesto en la última parte de la sección anterior mostró que las variables referentes a costos distintos de los de los docentes no fueron estadísticamente significativas. El modelo final que se estimó por CMO constó de la variable dependiente conformada por el logaritmo natural del primer componente principal y como independiente el logaritmo natural de los costos para todos los grupos de docentes.

A continuación se presenta la gráfica de la distribución de los residuales producto de la regresión recién mencionada: se aprecia que la media es apenas

inferior a cero y que la mediana es negativa. Además, las distintas pruebas que muestran que la distribución de los residuales no es normal se presentan en la tabla siguiente. Se concluye, afortunadamente, que la distribución de los residuales no es normal, y tampoco es simétrica, como se aprecia en la gráfica respectiva. La línea curva superpuesta en la distribución de frecuencias es la función normal teórica y se deja para propósitos comparativos.

Test	Statistic	DF	p Value
Kolmogorov-Smirnov	D 0.074958		Pr > D <0.010
Cramer-von Mises	W-Sq 0.632545		Pr > W-Sq <0.005
Anderson-Darling	A-Sq 4.003166		Pr > A-Sq <0.005
Chi-Square	Chi-Sq 173.276376	10	Pr > Chi-Sq <0.001

Tabla 3



Gráfica 1

```

Stoc. frontier normal/half-normal model      Number of obs   =      476
Log likelihood = -233.24827                  Wald chi2(1)    =      16.04
                                              Prob > chi2     =      0.0001
    
```

lprod	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
ldoc	.2717193	.0678446	4.01	0.000	.1387464	.4046922
_cons	-2.163027	.9331183	-2.32	0.020	-3.991905	-.3341485
/lnsig2v	-1.857884	.0649337	-28.61	0.000	-1.985152	-1.730617
/lnsig2u	-10.87073	86.01004	-0.13	0.899	-179.4473	157.7059
sigma_v	.3949713	.0128235			.3706207	.4209218
sigma_u	.0043596	.1874862			1.08e-39	1.76e+34
sigma2	.1560213	.0101664			.1360956	.175947
lambda	.0110379	.1886685			-.3587457	.3808214

Tabla 4

En vista de que la distribución de los residuales no es simétrica, el paso siguiente es aplicar el método de máxima verosimilitud al modelo utilizando como variables las mismas mencionadas en la regresión previa, considerando que el disturbio de la ineficiencia técnica se aproxima por una distribución seminormal.

La Tabla 4 recoge los principales resultados de tal modelo. Los estimados de las variables de insumo y producto mostraron coeficientes significativos, pero los estimados de los parámetros del modelo de frontera estocástica tuvieron un ajuste relativamente pobre, desafortunadamente: esto sucede tanto con el estimado del  $\sigma_u$  ( $\sigma_u$ ) como con el  $\lambda$ .

A pesar de lo aparentemente poco alentadores resultados se hizo la estimación de la ineficiencia técnica de las instituciones educativas. A continuación se presentan las que pueden considerarse como las más ineficientes y luego las que se encuentran alrededor de la frontera:

Grupo de las Instituciones educativas más ineficientes, ordenadas de mayor a menor ineficiencia

CLAVE	LOCALIDAD	JORNADA
219	San Cristóbal	Mañana
271	San Cristóbal	Mañana
227	Suba	Mañana
290	Ciudad Bolívar	Mañana
311	Usme	Mañana
250	San Cristóbal	Mañana
156	Rafael Uribe	Tarde
120	La Candelaria	Noche
118	Santafé	Tarde
288	Ciudad Bolívar	Mañana

Grupo de las Instituciones educativas más eficientes, ordenadas de mayor a menor eficiencia

CLAVE	LOCALIDAD	JORNADA
145	Ciudad Bolívar	Tarde
262	San Cristóbal	Tarde
124	Bosa	Tarde
51	Teusaquillo	Tarde
319	Usme	Tarde
144	Ciudad Bolívar	Mañana
469	Usme	Mañana
243	Rafael Uribe	Tarde
446	Usaquén	Noche
415	Fontibón	Tarde

Esta jerarquización resultó comparable a la hallada por Díaz y Mutis [7] cuando se efectuó una análisis

en el que se comparaban los mismos centros educativos cuando se utilizaban técnicas como Componentes principales y Análisis Envolvente de Datos. Se anota que, a pesar de la relativa pobreza de los estimados de los Betas, sigmas y lambdas del modelo de frontera estocástica, la jerarquización obtenida no fue tan irregular como podría esperarse cuando se la comparó con el estudio mencionado.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Kumbhakar & Knox  
*Stochastic Frontier Analysis*  
USA: Cambridge University Press, 2000.
- [2] Aigner, Lovell & Schmidt  
*“Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models”*  
*J. of Econometrics* Vol. 6:1, , pp. 21-37. July, 1977.
- [3] Meeusen & Van Der Broeck  
*“Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error”*  
*International Economic Review*. Vol. 18:2, pp. 435-44.  
June, 1977.
- [4] J. Jonderow, I. Lovell , S. Materov, & Schmidt  
*“On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model”*  
*J. of Econometrics* Vol. 19:2/3, pp. 233-38. August, 1982.
- [5] G. E. Battese & T. J. Coelli  
*“Prediction of Firm-Level Technical Efficiencies with a Generalized Frontier Production Function and Panel Data”*  
*J. of Econometrics* 38, pp. 387-99. 1988.

[6] W. H. Greene

*“A Gamma-Distributed Stochastic Frontier Model”*

*J. of Econometrics* Vol. 46:11/2, pp. 141-64. October/November, 1990.

[7] M. Díaz y H. Mutis

*“Una comparación de la jerarquización de 476 unidades educativas realizada a través de Análisis Envolvente de Datos y de Componentes Principales en Bogotá, D.C.”*

Memorias del III Congreso Colombiano y I Conferencia Andina Internacional de Investigación de Operaciones, marzo de 2004, Cartagena, Colombia.

#### BIBLIOGRAFÍA

Canay

*“Eficiencia y Productividad en Distribuidoras Eléctricas”.*

CEER, Universidad Argentina de la Empresa, 2002.

T. Coelli, D.S. Prasada Rao, & G. Battese.

*An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*

Kluwer Academic Publishers, Fifth printing, Massachusetts. 2001